MA1 – přednáška 12. 10. 2020

(text k přednášce)

I. V minulé přednášce jsme si trošku „povídali" o jazyku matematiky, o definici, jakožto přesném výkladu „nového" slova, o větách (matematických) a důkazech vět (těch matematických), a o tom, co je důležité pro „správné" užití matematiky.

Ukažme si to v příkladu, který bude zároveň i příkladem k opakování monotonie funkce – důležité vlastnosti funkce:

1) definice:

Funkce f je rostoucí (resp. klesající) v intervalu $(a,b) \subset D_f$, když pro každé dva body $x_1, x_2 \in (a,b)$, kde $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

(poznámka: na „konci" příkladu ukážeme, jak se definice zapíše v matematičtině a jejích symbolech)

Funkcím rostoucím, resp. klesajícím, se říká funkce ryze monotonní.

2) proč (?)

je tato definice (vlastnosti „ryzí monotonie") vytvořena – pro aplikování funkcí je důležité toto znát, vědět, kdy se hodnoty vyšetřované veličiny zvětšují („rostou"), nebo zmenšují („klesají"), a třeba navíc i proto, že funkce v bodě, kde „přestane" růst a „začne" klesat, může mít maximální hodnotu (maximum), což je v mnoha aplikacích důležité a vyšetřením monotonie funkce lze tyto body najít (i maximální (resp. minimální) hodnoty funkce – budeme umět později)

3) <u>věty (matematické) a jejich důkazy:</u>
(jak bylo řečeno, věty shrnují důležité vlastnosti definovaného pojmu, i souvislosti s jinými pojmy, a dávají návod, co vše můžeme s definovaným pojmem „dělat" a jak !)

<u>Věta o monotonii funkce</u> – „náš příklad" – je hodně, uveďme si tři tvrzení (možná i užitečná)

(i) Je-li funkce f i funkce g rostoucí na intervalu (a,b), pak i funkce $f+g$ je na intervalu (a,b) rostoucí
$((f+g)(x) = f(x)+g(x),\ x\in(a,b))$.

(ii) Je-li funkce f rostoucí na intervalu (a,b) a $f(x)>0$ v (a,b) (resp. $f(x)<0$ v (a,b)), pak funkce $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ je na (a,b) klesající.

(iii) Nechť funkce g je klesající na intervalu (α,β), a nechť $g(\alpha,\beta) = (a,b)$, nechť dále funkce f je rostoucí na intervalu (a,b). Pak složená funkce $h(x) = f(g(x))$ je klesající na intervalu (α,β).

A další „věty" o monotonii zkuste formulovat sami !

<u>Poznámka:</u> Že tvrzení (i) – (iii) platí, asi „vidíte", v matematice se říká, že jsou „zřejmá", toto „vidění" je užitečné v aplikacích, je důležité, ale matematické „důkazy" pak ukáží, že (a též zda) „vidíme" správně.
Zkusme si aspoň jeden z důkazů uvedených tvrzení – důkaz tvrzení o monotonii složené funkce (iii):

Důkaz tvrzení (iii):

1) formulujme dle definice, co máme dokázat:
když $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, $x_1 < x_2$, pak $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$ (*)

2) a co máme „k dispozici" pro to, abychom (*) odvodili? předpoklady věty – „napišme":
(i) g je klesající v (α, β), tj. dle definice:
pro $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ je $g(x_1) > g(x_2)$ (x_1, x_2 lib. z (α, β));
(ii) f je rostoucí na (a, b), tj.
když $y_1, y_2 \in (a, b)$, $y_1 < y_2$, pak $f(y_1) < f(y_2)$;

Zvolme tedy libovolné $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, $x_1 < x_2$; pak
dle (i) je $g(x_1) > g(x_2)$ a
dle (ii) je $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$
(zde nevadí, že nerovnost je „obrácená" napsaná, než v definici)
tedy, máme tvrzení (v 1)) dokázáno!

4) užití definic pojmů matematických i vět:
(i) je užitečné (a nutné) znát u elementárních funkcí (známých ze střední školy), kde jsou rostoucí, nebo klesající; většinou vidíme z grafů, a neověřujeme z definice, neboť bychom to ani „neuměli" (zatím), např. u funkce $f(x) = e^x$, nebo $f(x) = \ln x$.

Př. Ale ukažme si jako příklad na ověření monotonie podle definice, že funkce $f(x)=x^2$ je rostoucí v intervalu $\langle 0,+\infty)$ a klesající v $(-\infty,0\rangle$ (i když každý „vidí"):

1) $x_1, x_2 \in \langle 0,+\infty)$, $x_1 < x_2$ $\quad (*)$

(i) vynásobíme $(*)$ x_1: $\quad x_1 < x_2 \mid \cdot x_1(\geq 0) \Rightarrow x_1^2 < x_1x_2$

(ii) — " — $(*)$ x_2: $\quad x_1 < x_2 \mid \cdot x_2(\geq 0) \Rightarrow x_1x_2 < x_2^2$ $\quad$ } a odtud

dostáváme: $x_1^2 \underset{(i)}{<} x_1x_2 \underset{(ii)}{<} x_2^2$, což „bylo ukázati"!

2) $x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$, $x_1 < x_2$ $\quad (**)$

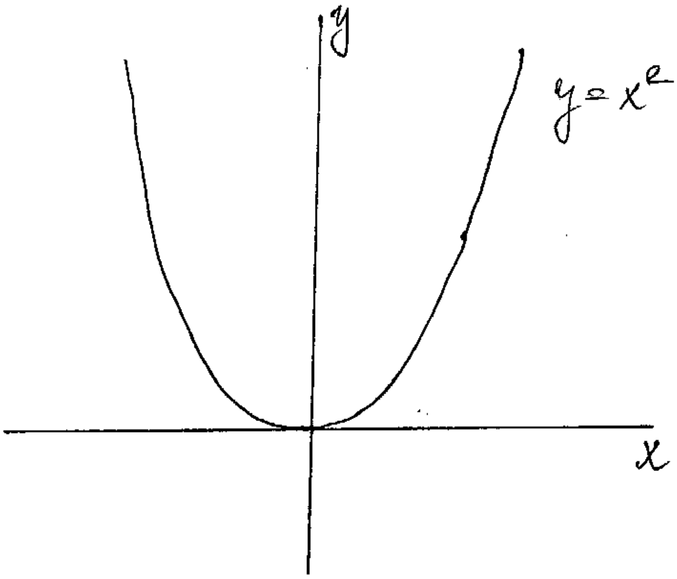
(i) $x_1 < x_2 \mid \cdot x_1(<0) \Rightarrow x_1^2 > x_1x_2$

(ii) $x_1 < x_2 \mid \cdot x_2(<0) \Rightarrow x_1x_2 > x_2^2$ $\quad$ } a odtud tedy

$x_1^2 > x_1x_2 > x_2^2$, tj. „máme":

$x_1, x_2 \in (-\infty,0\rangle$, $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$, tj. f klesá v $(-\infty,0\rangle$.

A „výsledku" odpovídá i „známý" graf funkce $f(x)=x^2$.



A jako druhý příklad si ukažme aplikaci tvrzení (iii) na vyšetření monotonie složené funkce:

<u>Mějme funkci $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$:</u>

f je složená funkce, $f(x) = g(h(x))$, kde
$h(x) = \frac{1}{x}$, a $g(y) = e^{y}$;

<u>$Df = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$</u> ($x \neq 0$ díky funkci $h(x) = \frac{1}{x}$, e^{y} je na pak definována „všude")

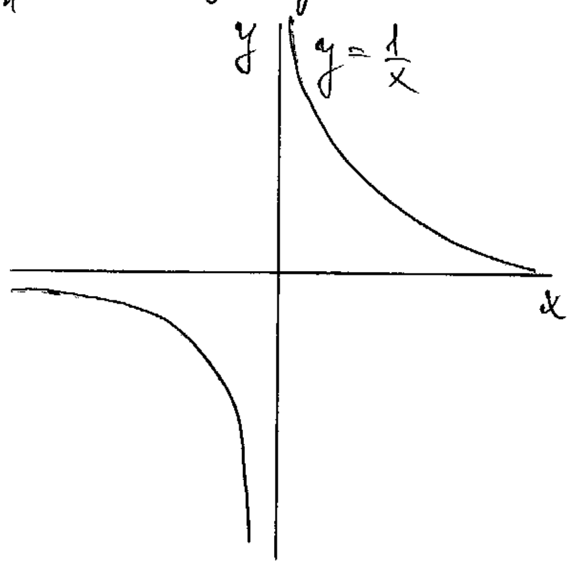
<u>a nyní:</u> funkce $k(x) = x$ je rostoucí a kladná v $(0, +\infty) \Rightarrow$

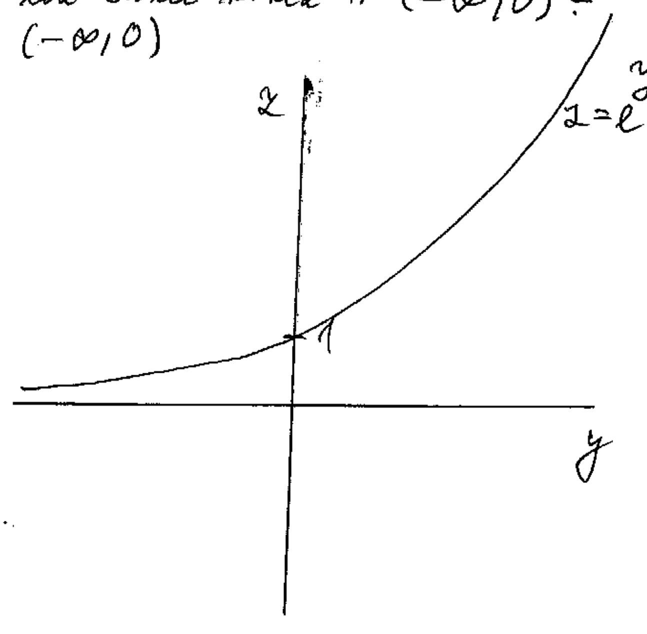
1) $\Rightarrow h(x) = \frac{1}{x}$ je klesající v $(0, +\infty)$ (α (ii))

2) funkce $g(y) = e^{y}$ je rostoucí v $\mathbb{R}$, tedy i v intervalu $h(0, +\infty)$ ($= (0, +\infty)$) ;

tedy dle (iii) (což jsme i dokázali) je funkce $e^{\frac{1}{x}}$ klesající v intervalu $(0, +\infty)$; zcela stejně tak i v $(-\infty, 0)$ – f je klesající i v $(-\infty, 0)$

„Pomocné" grafy:



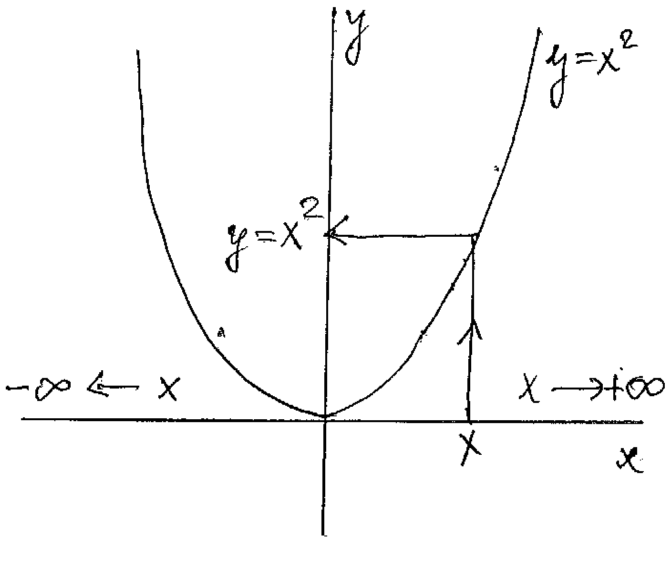


Poznámka:

V tomto příkladu jsme si ukázali, že dle definice a aplikací vět (ii),(iii) zde) nedokážeme ukázat monotonii funkce, čili když graf vyšetřované funkce nevidíme (zatím); k tomu, abychom si mohli představit graf funkce $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, tedy „zviditelnit" tuto funkci, nám právě pomohou limity – – a to je úkolem druhé části přednášky.

II. Limita funkce „intuitivně".

1) Vezměme si opět funkci $f(x)=x^2$ a načrtněme si graf (opět):

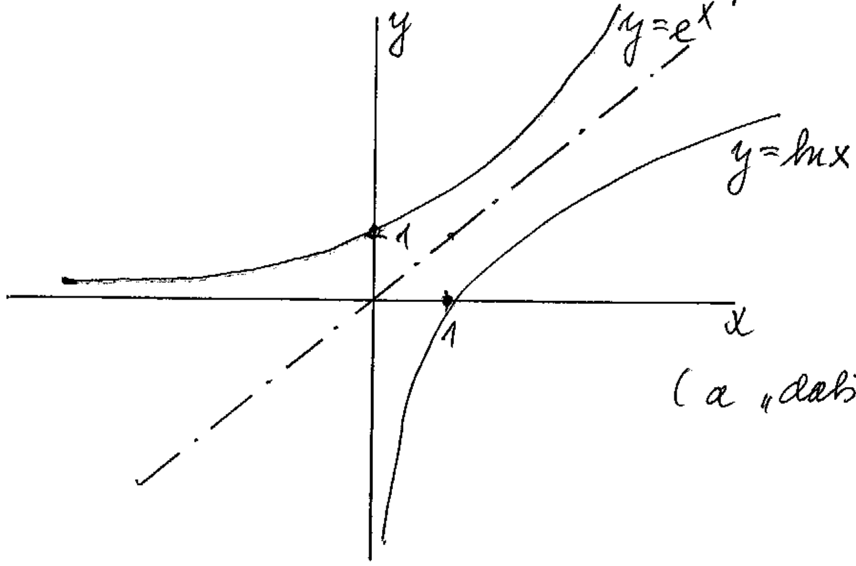


– zkusme „popsat" graf fce x^2 nyní pro „x" stále se zvětšující, ale víme, že x^2 je rostoucí v $\langle 0,+\infty)$ tj. pro x se zvětšující (kladné) – se hodnoty funkce, tj. $y=x^2$ také zvětšují – a otázka je, jak, kam „až" se zvětší, když x se bude stále zvětšovat –

– píšeme: $x \to \infty$ – je pravda, že též $y=x^2$ porostou „nade všechny meze" – tj. i $y=x^2 \to +\infty$ pro $x \to \infty$? Vidíme (a asi i věříme), že ano – a budeme říkat zde, že limita funkce $f(x)=x^2$ je nekonečno, jde-li x k $+\infty$, a psát budeme (symbolika limit):

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad \left(\text{obecněji: } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right)$$

„Stejně" se pro $x \to +\infty$ chovají i funkce $f(x) = x^n$, $n \in N$



$f(x) = \sqrt[n]{x}$,

$f(x) = e^x$,

$f(x) = \ln x$;

(a „další" vypátrejte sami!)

A podívejme se na „druhé" nekonečno – ? $x \to -\infty$

(tj. x se vzdaluje stále od počátku směrem „vlevo"

(po „záporné" části osy x)

Na grafu funkce $f(x) = x^2$ „vidíme" opět, že asi $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$,

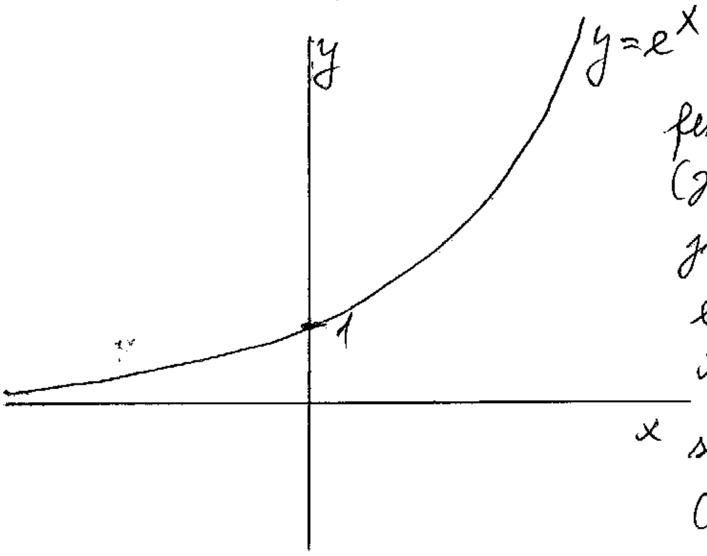
a stejně pak i $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2k} = +\infty$ $(k \in N)$ (víme též, že funkce $f(x) = x^{2k}$, $k \in N$, jsou „sudé", graf mají souměrný dle osy y).

Ale $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ (hodnoty funkce $f(x) = x^3$ jsou v absolutní hodnotě také čím dál „tím" větší, nejsou ničím omezené (asi), ale jsou záporné – a to značíme pomocí „$-\infty$" – $x^3 \to -\infty$ pro $x \to -\infty$, tedy)

Zřejmě také $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty$, $k \in N$,

nebo $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$, dále hledejte sami!

Ale další otázka – jak se chová „u $(-\infty)$" funkce $f(x)=e^x$ – vidíme to asi, tak si to popišme:



pro $x\to-\infty$ jsou hodnoty funkce e^x čím dál tím menší (je to funkce rostoucí), stále jsou kladné, ale zřejmě hodnoty e^x budou „libovolně" malé pro x dosti „daleko", tj. pro $x\to-\infty$ se hodnoty e^x budou blížit k 0 (graf se „lepí" k ose x) –

budeme psát: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

a říkat: funkce $f(x)=e^x$ má v $-\infty$ limitu 0.

A asi je „vidět", že $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+3)=3$, nebo též například

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

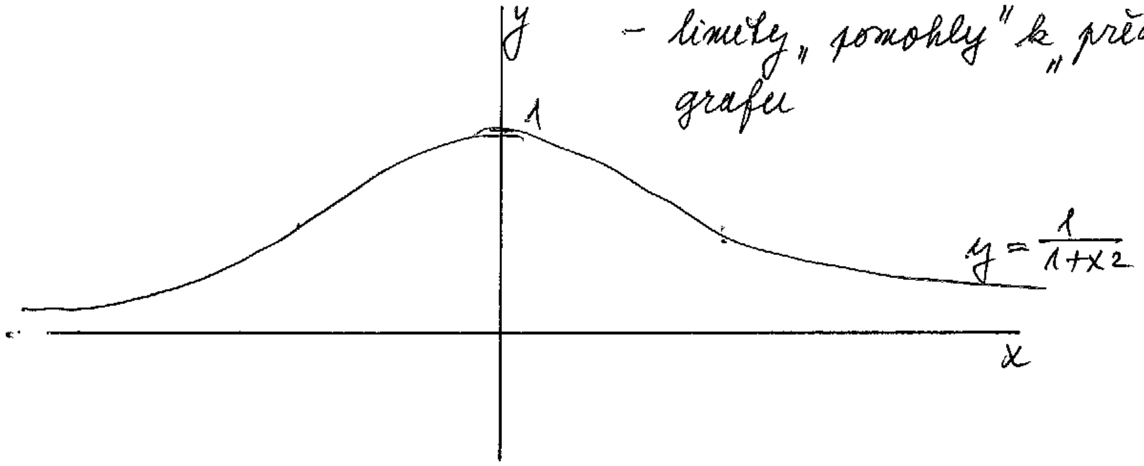
(stále se řídíme zřejmě intuicí – zatím neznáme žádnou definici limity, a k definicím dojdeme, až budeme limity „vidět")

Graf funkce $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ jsme zkusili na minulé přednášce, a teď snad už víme lépe – že

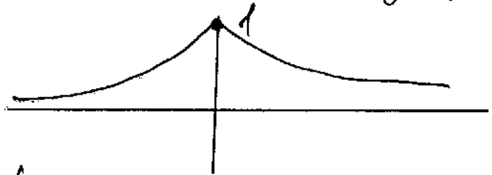
1) f je funkce sudá, $D_f=\mathbb{R}$, $f(x)>0$ v D_f, $f(0)=1$
2) f je klesající v $\langle 0,+\infty)$ (a rostoucí v $(-\infty,0\rangle$;
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$ (zatím intuice), a tedy graf:

Graf funkce $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ (k monotonii jsme přidali limity pro $x\to+\infty$ a $x\to-\infty$):

- limity „pomohly" k „představě" grafu



(že je to „Říp", tj. že v $x=0$ není na grafu „špička", tedy že graf není



, se dozvíme dále v pokračování „diferenciálním" počtu trochu později)

A trochu názvosloví:

- $+\infty$ a $-\infty$ se nazývají nevlastní body;
- limity funkce pro $x\to+\infty$ (nebo $x\to-\infty$) se nazývají limity funkce v nevlastním bodě $+\infty$ (nebo v $-\infty$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\ (-\infty)$ –

  – nazývají se nevlastní limity f v nevlastním bodě

  (říká se – limita funkce f v $+\infty$ je $-\infty$ (např.), tedy zápis je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, a dále podobně)
- a ještě jsme měli $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ – obecně $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L\in R$, nebo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L\in R$ – vlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$ (resp. $-\infty$)

<u>a otázka – „limity" se také pro $x \to a$, $a \in R$?</u> – ano!

(je to užitečné, velice!)

Těmto limitám se „říká" <u>limity funkce ve vlastním bodě (a)</u>,

a značí se $\underline{\lim\limits_{x \to a} f(x) = L}$ (vlastní limita (L) ve vlastním bodě (a)),

ale nemůže být i $\underline{\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \text{, nebo } \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty}$

(nevlastní limita $(+\infty, -\infty)$ ve vlastním bodě);

<u>a pozorování</u>: u všech zatím námi uvažovaných funkcí, jejichž grafy jsme si načrtli, v libovolném bodě $a \in Df$ je zřejmě

$$\underline{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)} \quad ,$$

a graf, dle pozorování, není v žádném bodě $a \in Df$ „roztržený" – v matematice (učeně) říkáme:

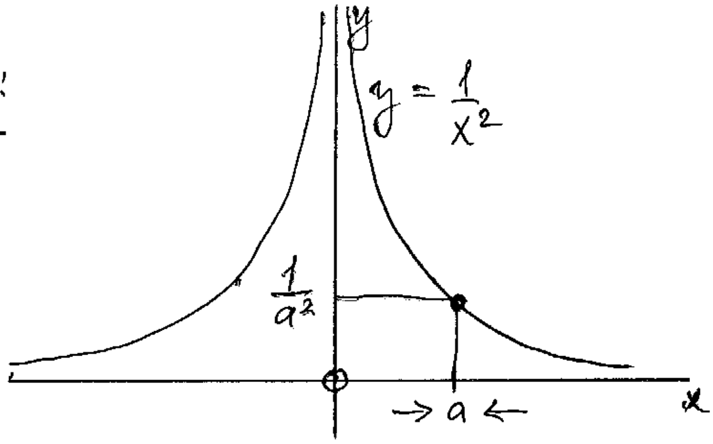
<u>Definice</u>: Funkce f je spojitá v bodě $a \in Df$, když

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

<u>a ještě poznámka</u> – spojitost funkce f v bodě a (a asi i limitu f pro $x \to a$ nemůžeme uvažovat (a zkoumat), když je funkce definována někde „kolem" bodu $\underline{a}$, abychom se mohli blížit k bodu a (tj. $x \to a$) – – přesně budeme definovat příště (dnes se snažme si představit limitu funkce „intuitivně")

A dále tedy budeme „zkoumat" limity funkce ve vlastním bodě:

1) vezměme si funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$:



$\mathcal{D}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) > 0$,
f je sudá, a tušíme, že
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$,
a $\frac{1}{x^2}$ klesá v $(0, +\infty)$ (neboť $f(x) = x^2$ zde roste), a roste v $(-\infty, 0)$;
k představě grafu by pomohla limita pro $x \to 0$, tj. k tomu bodu, kde f není definována:

ledy x bude blízko 0, pak x^2 bude ještě blíže, a hodnota $\frac{1}{x^2}$ bude „veliká", a pro x k 0 se přibližující $\frac{1}{x^2}$ bude stále větší, asi „poroste nade všechny meze –

– to budeme psát : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ – a graf už si umíme představit (viz „začátek" příkladu)

A podobně (jistě „vidíte") :

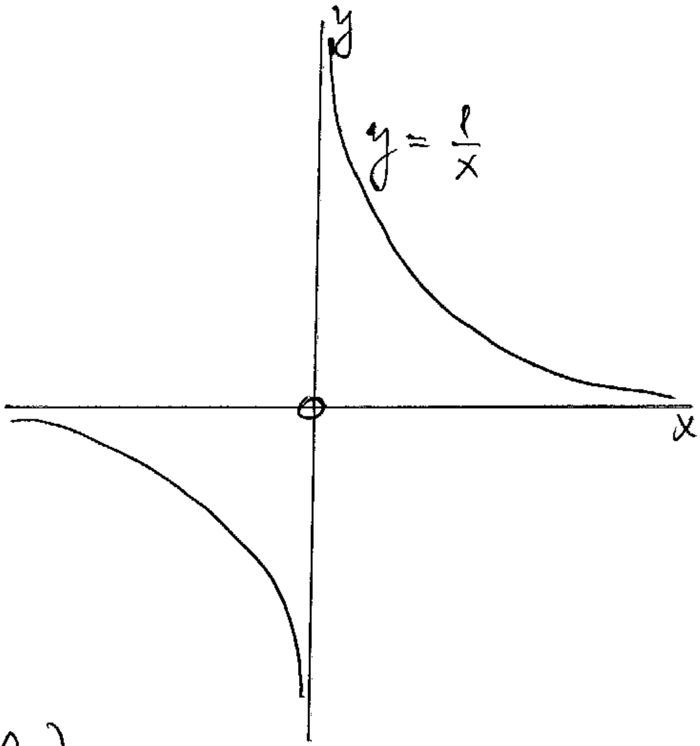
$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty , \quad \lim_{\substack{x \to a \\ a \neq 2}} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(a-2)^2} ,$$

tedy, f je spojitá (asi, zřejmě) v každém bodě $a \in \mathcal{D}f$.
($\mathcal{D}f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$)

2) vezmeme $f(x) = \frac{1}{x}$!

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

graf (je známý ze školy):



na únikové: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ i

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

(budeme psát $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$)

A opět vidíme, že i zde je užitečné „zkoumat" a říci jak, jak se chová funkce blízko bodu, kde není definovaná, tj. zde pro $x \to 0$. Ale co vidíme?

$f(x) = \frac{1}{x} \to +\infty$ pro $x \to 0$, ale jen, je-li $x > 0$!
(jdeme „zprava")

a naopak, $\frac{1}{x} \to -\infty$ pro $x \to 0$, ledaže $x < 0$
(jdeme k 0 zleva)

Každá „část" grafu pro $x \to 0$ „míří" jinam, na limitě se neshodnou, ale aspoň je

zprava $(x > 0)$ $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, zleva $(x < 0)$ $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Tyto limity se nazývají jednostranné limity – (ve vlastním bodě)

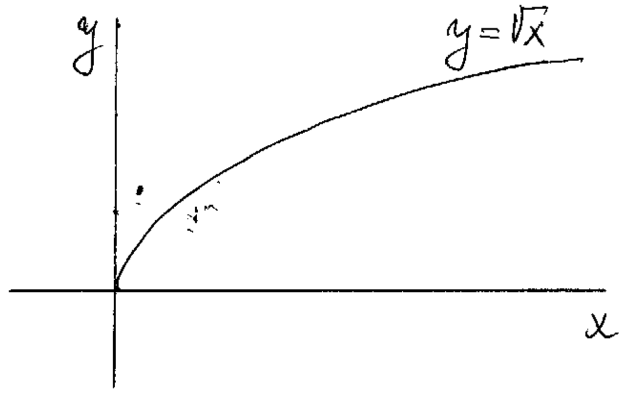
limita f zprava v bodě a : $\lim_{x \to a+} f(x)$

limita f zleva v bodě a : $\lim_{x \to a-} f(x)$

- Pokud $\lim_{x \to a+} f(x) \neq \lim_{x \to a-} f(x)$, říkáme, že f v bodě a limitu nemá.

3) a příklady limit dalších „tahákových" funkcí (intuitivně stále)

$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \langle 0, +\infty)$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$



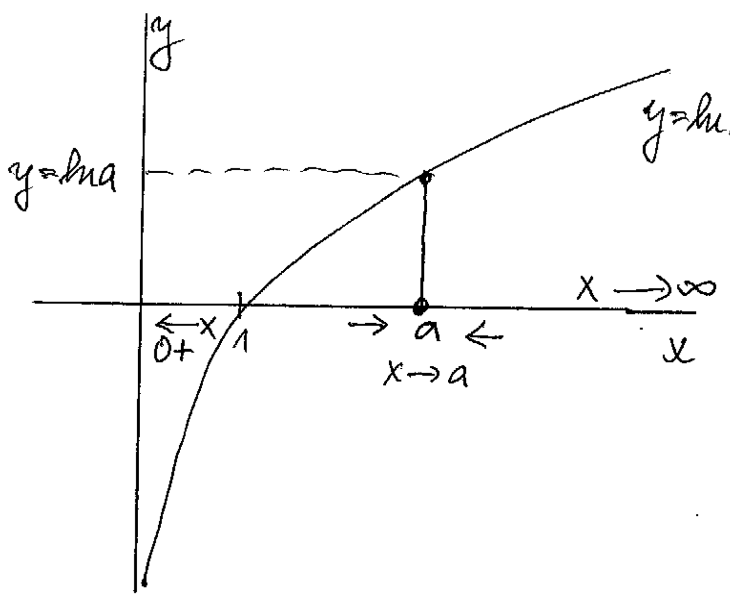
$\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$

(fce $\sqrt{x}$ je rostoucí v $\langle 0, +\infty)$)

$\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$,

tj. funkce $\sqrt{x}$ je spojitá v bodě a.

$f(x) = \ln x$, $D_f = (0, +\infty)$



a zde (vidíme) :

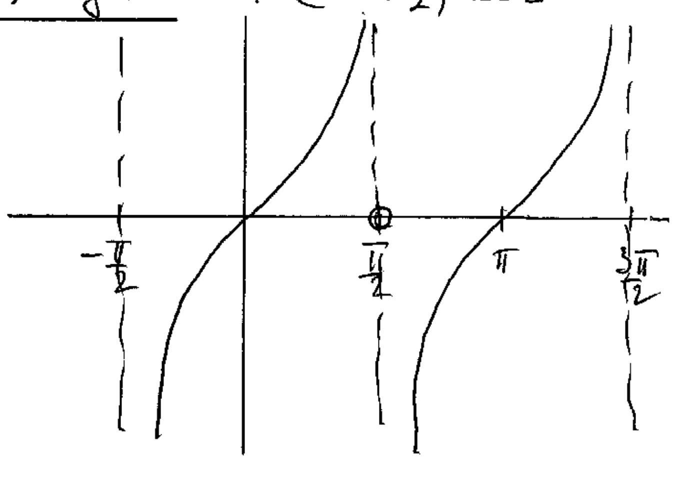
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a$ $\quad (a \in (0, +\infty))$,

tj. $\ln x$ je funkce spojitá v $(0, +\infty)$ (rostoucí v $(0, +\infty)$)

$f(x) = \operatorname{tg} x$ $\quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$



zde například :

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, a

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$

4) Příklad nespojité funkce v bodě –

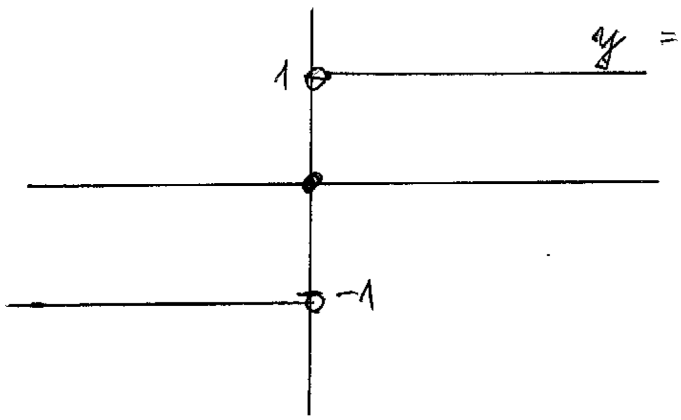
– tj. funkce, která v bodě, kde je definována, má buď limitu různou od funkční hodnoty v tomto bodě, nebo v tomto bodě limitu nemá (například když

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$, pak f v bodě a nemá limitu (zřejmě))

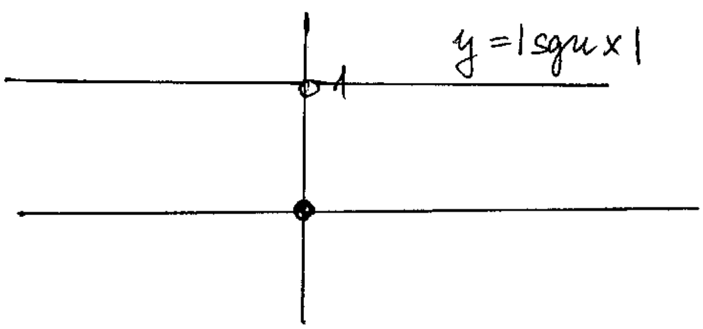
Příklad takové funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$;

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to 0+} 1 = 1 \quad \text{(zřejmě)} \\ \lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to 0-} (-1) = -1 \quad \text{(—"—)} \end{array}\right\}$$

tedy, $\operatorname{sgn} x$ nemá v bodě $a=0$ limitu ($f(0)=0$)



Ale ani funkce $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ není spojitá v bodě $a=0$, i když $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, neboť zde $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| \neq |\operatorname{sgn} 0| = 0$

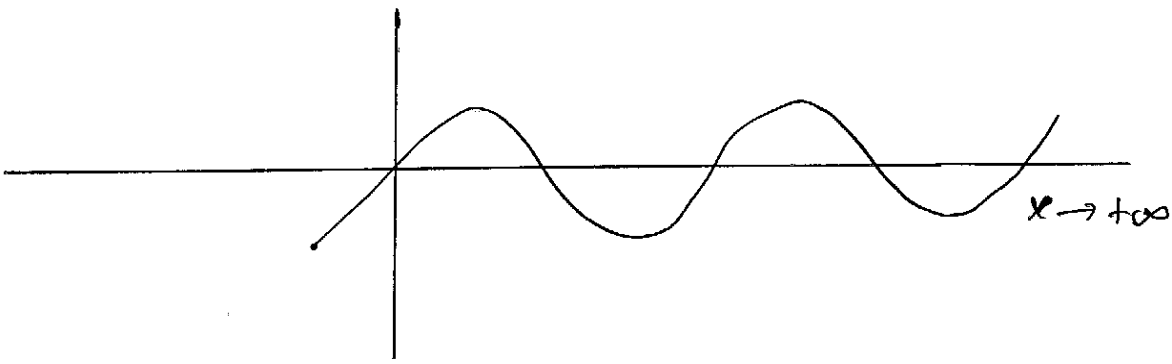


5) ještě jedna „situace" v „limitění"

$f(x) = \sin x$ $(Df = \mathbb{R})$, a otázka – má tato funkce limitu pro $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$;

Asi každý z grafu „vidí", že ne! – graf funkce $\sin x$ se stále „vlní", a „nikam" se hodnoty sinu neblíží – – řekneme, že sinus nemá v $\pm\infty$ limitu, nebo –

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$ neexistuje (naučíme se to i „dokázat", tedy ověřit, že si to myslíme správně)



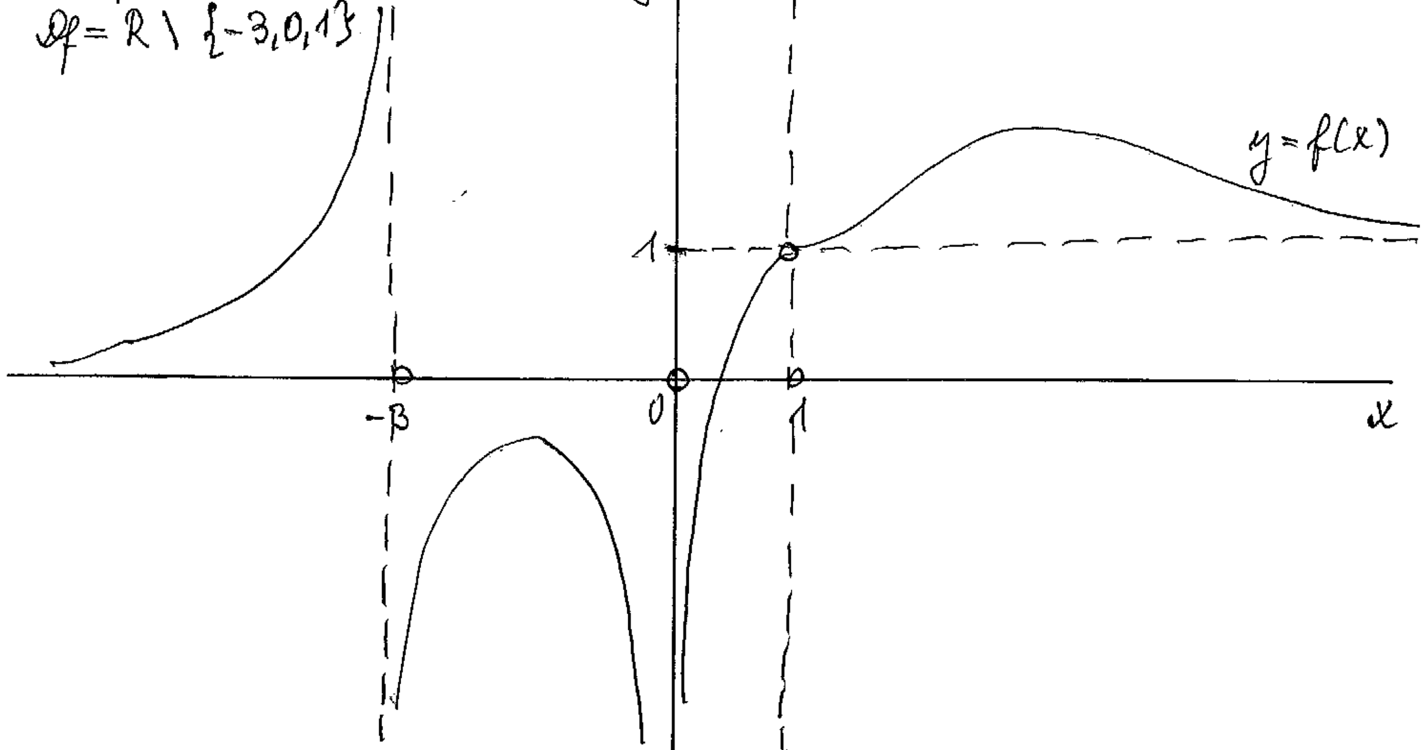
A co třeba $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$ – dokážete odhadnout?, „vidíte" graf?

nebo $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $Df = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ – pokud bychom odhadli limity pro $x \to \pm\infty$ a pro $x \to 0\pm$, asi už bychom uměli si představit i graf – už z příkladu na začátku přednášky víme, že f je klesající v $(0, +\infty)$ i v $(-\infty, 0)$

Budeme umět najít limity „složitějších" funkcí pomocí znalosti limit těch funkcí základních („tahákových")? Ukážeme si to podrobně příště přednášce, dnes bychom mohli ještě cvičit „pochopení" pojmu limita, a udělat několik pokusů, příště bychom přesně „vyjádřili", co znamenají jednotlivé „druhy" limit (tj: uvedli bychom si definice limit (aspoň některých) a ukážeme si, co a jak lze „počítat", a kde budeme mít s počítáním problémy a jak je (možná) vyřešíme.

<u>Pokus 1.</u> – „popis" grafu fce a „jeho" limit (tj: limit fce f):

Například:
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$



<u>Zde:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-3-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-3+} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$,

a f je spojitá v každém bodě z D_f.

Pokus 2. – „domácí" – Váš vlastní:

1) vymyslete si Df (dané $R \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (nebo i více, ale konečně „děr" v Df – raději")

2) zvolte si (dle „chuti") limity v $\pm\infty$ a v bodech a_i.

3) a pak si zkuste dle těchto limit (a spojitosti f v Df) načrtnout „odhad" grafu.

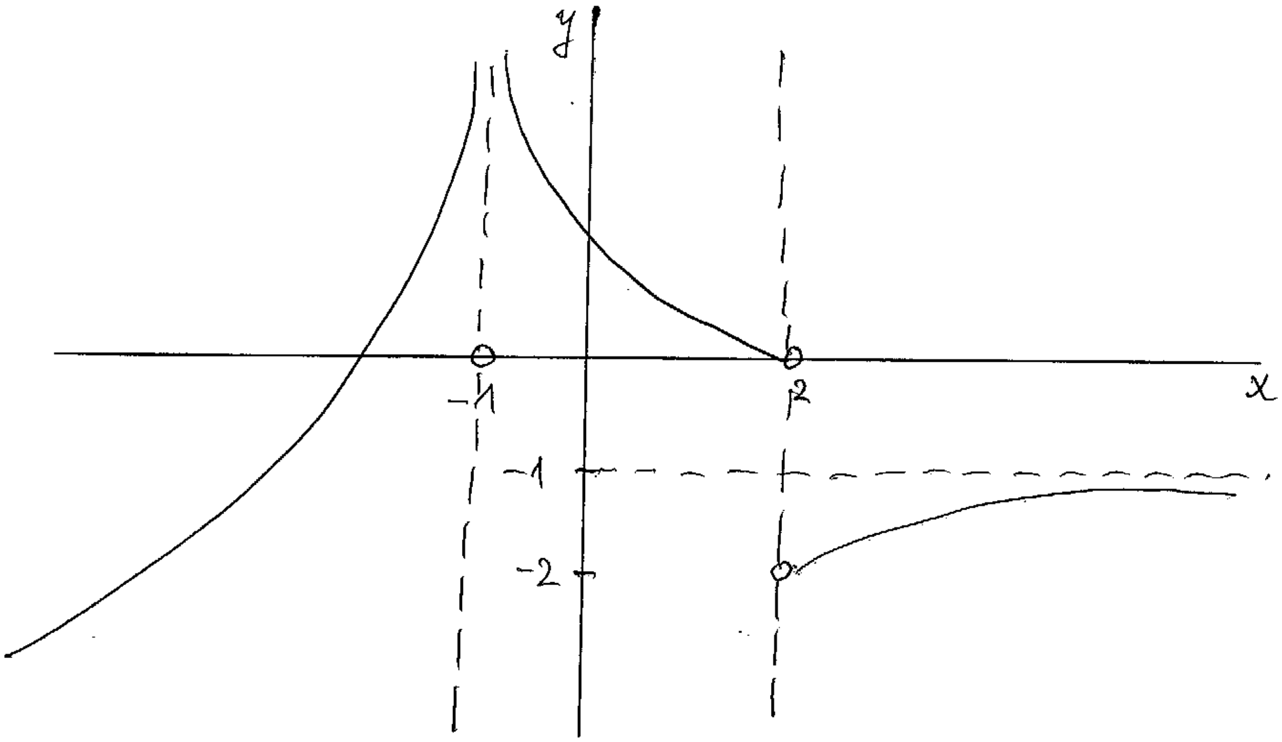
Můj pokus:

1) $Df = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$

(tj. $x \neq -1, 2$ – dvě „díry" v Df)

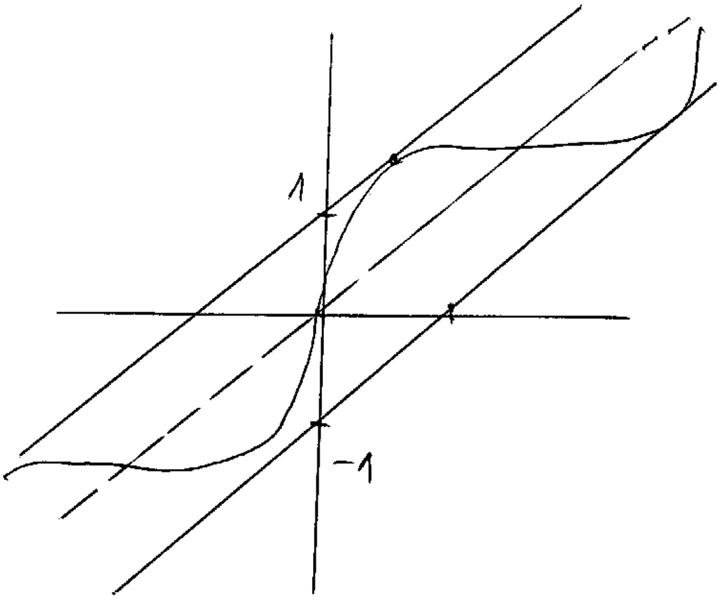
2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 2-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = -2$,

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$, f je spojitá ve všech bodech z Df:



Pokus 3. $f(x) = x + \sin x$, $\mathcal{D}f = R$,

a „pozorování": $x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$, $f(k\pi) = k\pi$



? (přibližný graf)

ale $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x) = +\infty$!

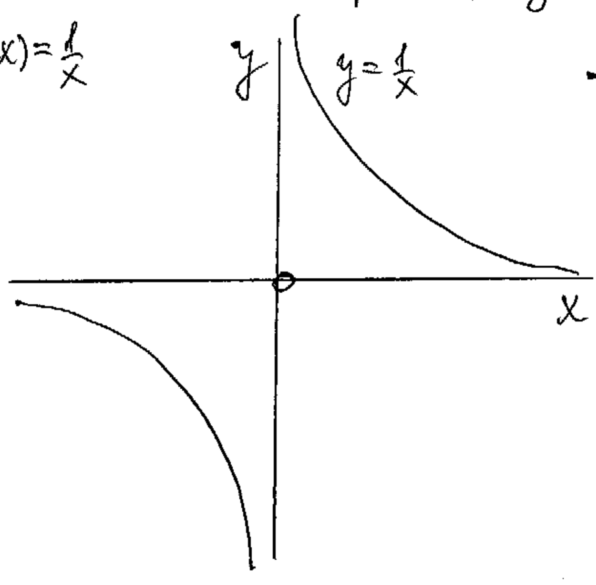
(důležité pozorování, ukážeme brzy, že je to „pravda")

Pokus 4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, pokusíme se o graf této funkce složené pomocí vlastností grafů funkcí „tahákových" – tj. funkcí

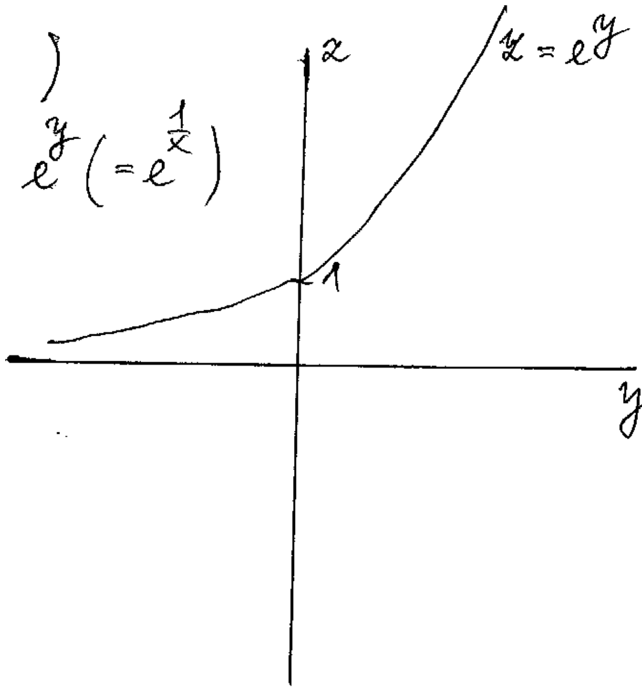
$h(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = e^{y}$

T(*) : $\left(f(x) = g(h(x)) \right)$

$h(x) = \frac{1}{x}$



$\longrightarrow e^{y} \left(= e^{\frac{1}{x}}\right)$



1) $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; $f(x) > 0$ v D_f ;

2) už víme, že f je klesající v intervalu $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$;

(můžeme si „zopakovat" důkaz v příkladu :

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow e^{\frac{1}{x_1}} > e^{\frac{1}{x_2}}$$

(exponenciální funkce je rostoucí!)

analogicky „to" dostaneme i v intervalu $(-\infty, 0)$)

3) zbývá ukázat (nebo spíše najít), „odkud" a „kam" funkce klesá v $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$ – a právě tohle nám řeknou limity :

$$\underline{\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \to 0} e^{y} = e^{0} = \underline{1}$$

spojitost funkce e^y v bodě $y = 0$

pohled na tabulku (*)

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ (a $y = \frac{1}{x}$ $\nearrow$)

<u>analogicky</u> :

$$\underline{\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \to 0} e^{y} = \underline{1} \quad \left(\text{neboť } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \right)$$

<u>a limity pro $x \to 0$:</u>

(„asi")

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty, \quad \text{tedy}$$

$(y = \frac{1}{x})$

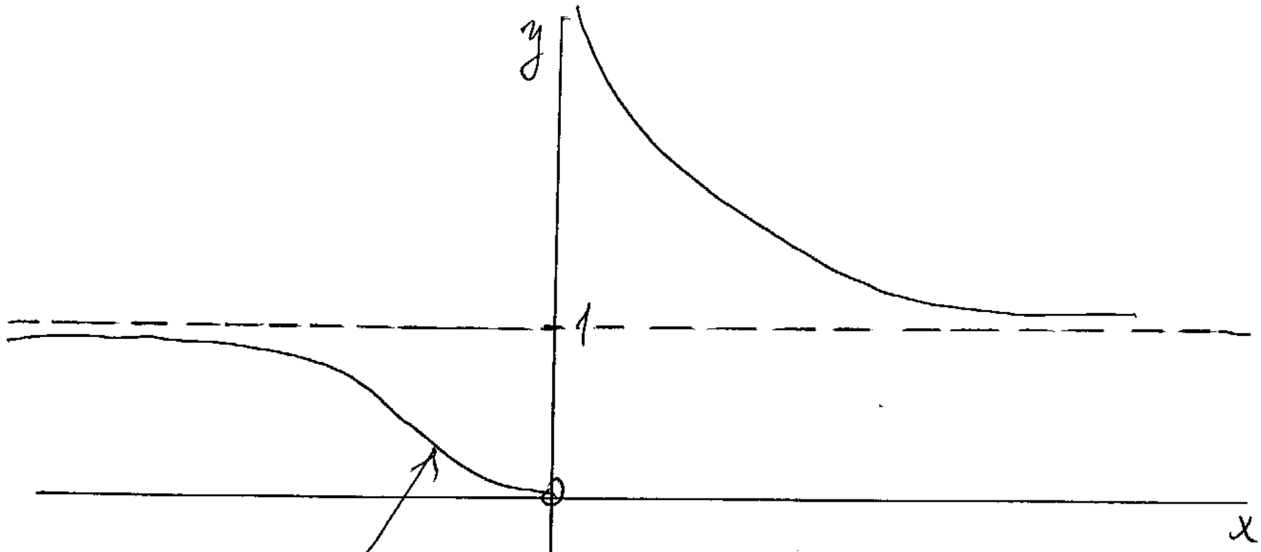
$$\underline{\lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \to +\infty} e^{y} = \underline{+\infty}$$

A limita poslední:

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$$ (viz „tahák" – $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$,

a $\lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$ ($y = \frac{1}{x}$))

A snad už lze si graf funkce představit:



toto prohnutí se naučíme „nalézt" díky diferenciálnímu počtu později

Poznámka ke grafu – jak si máme představit graf, když $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ (obecněji $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in R$) –

– „limitu" si můžeme představit tak, že $f(x) \cong L$ někde „daleko" na ose x ($x\to+\infty$), nakreslíme si graf konstantní funkce $g(x) = L$ (přímka $y = L$) a graf se pro $x\to+\infty$ k této přímce (asymptotě grafu) přibližuje („lepí").

Příště – definice a „počítání" limit.